ASSESSORATO PUBBLICA ISTRUZIONE E SPORT PROVINCIA DI PISA

LE GEOMETRIE DELLA CERTOSA

Dalla mostra "La Matematica sotto i piedi" promossa dalla Circoscrizione 6 del Comune di Pisa, dalla Sovrintendenza per i Beni A.P.P.S.A. - Pisa e dall'Istituto Statale d'Arte "F. Russoli" di Pisa

Quaderno n° 9 a cura del C.R.E.D. - Anno 2005

CENTRO DI DOCUMENTAZIONE E RISORSE EDUCATIVE - C.R.E.D.

CENTRO DI DOCUMENTAZIONE E RISORSE EDUCATIVE

ASSESSORATO PUBBLICA ISTRUZIONE E SPORT

PROVINCIA DI PISA

LE GEOMETRIE DELLA CERTOSA

Quaderno realizzato in occasione della mostra didattica

“La matematica sotto i piedi”,

promossa dalla Circoscrizione 6 del Comune di Pisa, dalla Sovrintendenza per i Beni A.P.P.S.A.E.-Pisa e dall’Istituto Statale d’Arte “F. Russoli” di Pisa.

INTRODUZIONE

Lo studio geometrico delle pavimentazioni presenti nelle cappelle e nella Chiesa conventuale della Certosa, e di quella del refettorio del Convento di San Giuseppe a Pisa, ha suggerito di completare il lavoro di riproduzione di tali ricoprimenti, fatto attraverso tarsie lignee e su vetro, presentando alcune curiosità matematiche ispirate alle diverse figure geometriche. In particolare si è sviluppato lo studio dell'ottagono regolare e dei poliedri a facce ottagonali. L'ottagono è una figura ricorrente nella Certosa e non solo nelle pavimentazioni (vedi il n. 10 della bibliografia). Questo quaderno vuole essere un aiuto a quanti intendessero ripercorrere il nostro lavoro: si tratta di un insieme di schede in cui abbiamo inserito le ricostruzioni geometriche di tutte le pavimentazioni, le soluzioni di alcuni dei giochi presentati, i modelli per costruire i solidi e altre idee che possono essere ulteriormente sviluppate. Inoltre, seguendo le semplici istruzioni allegate, si potranno ricostruire alcuni dei puzzle che sono esposti nella mostra o capirne la costruzione geometrica. Dietro al gioco di ricomporre in modo diverso la figura dell'ottagono, c'è molta matematica: il teorema di Pitagora, il problema di sezionare figure, l'equiscomponibilità delle figure, lo studio degli angoli interni di un poligono…

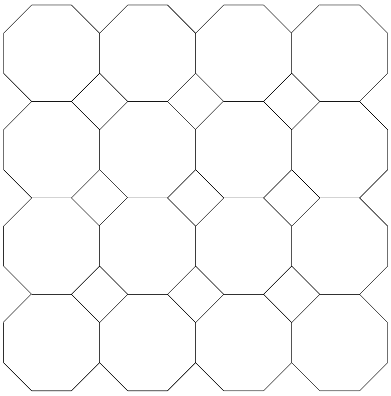
Si consiglia di fotocopiare i modelli su carta colorata, poi di incollarli su cartoncino (vanno benissimo anche le scatole di cartone che contengono le scarpe o le camicie) e infine tagliarli. La scelta di utilizzare materiale povero è stata fatta proprio per rendere possibile la riproduzione degli oggetti in mostra.

In conclusione sono presentate due schede, una per le scuole elementari e l'altra per le scuole medie, per una possibile lettura matematica delle pavimentazioni della Certosa.

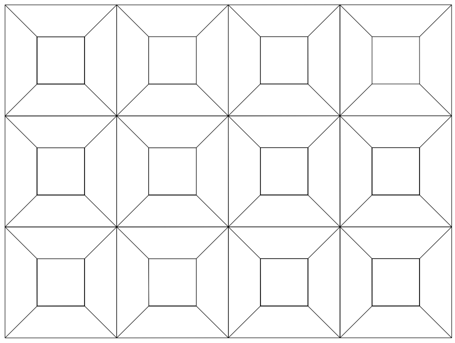
Per chi volesse saperne di più, si rinvia alla bibliografia che chiude queste pagine.

prof. Ornella Sebellin
Istituto Statale d'Arte "F. Russoli" Pisa

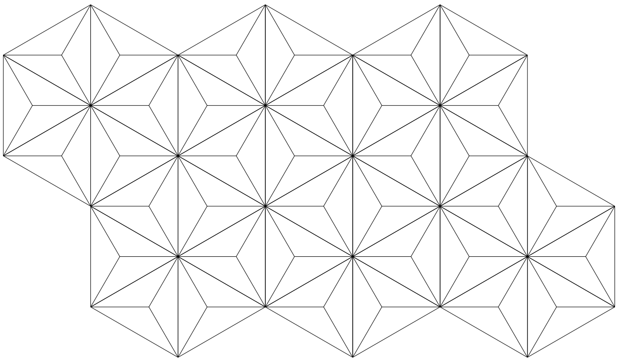
Le pavimentazioni della Certosa



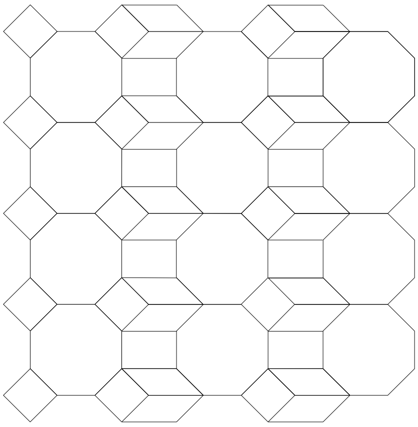
Cappella dell'Addolorata



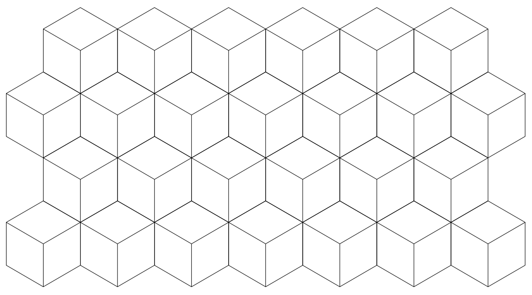
Cappella della Sacra Famiglia



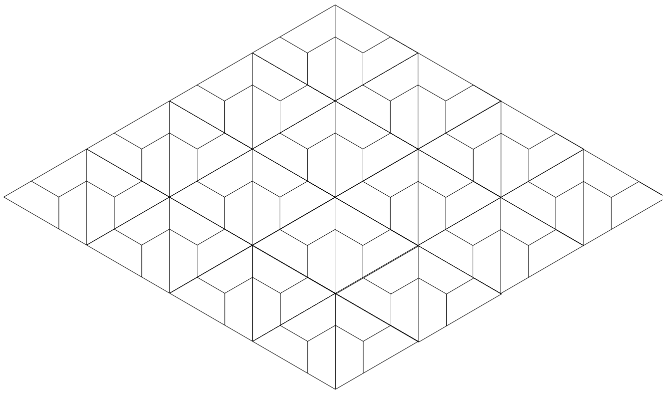
Cappella di San Giovanni



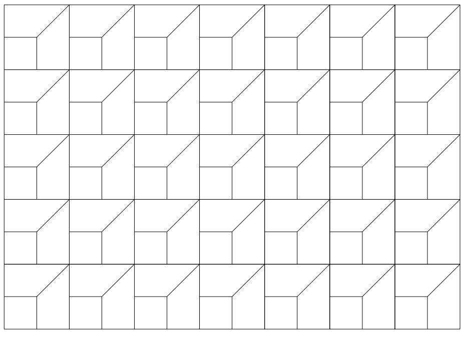
Cappella del Rosario



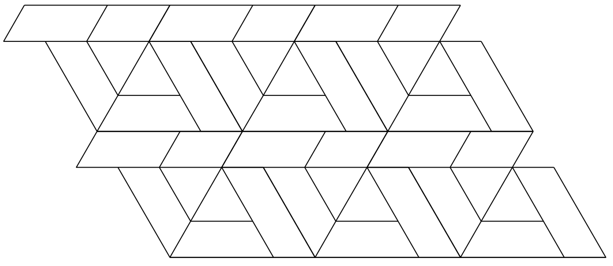
Cappella di San Bruno



Cappella di San Ranieri

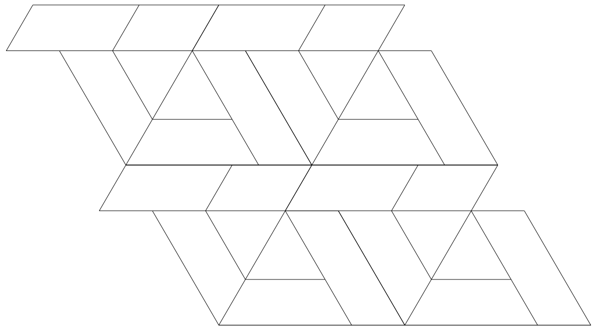


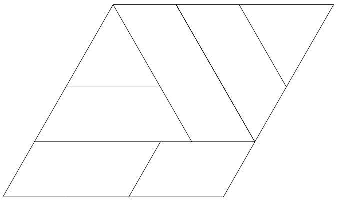
Cappella del Crocefisso



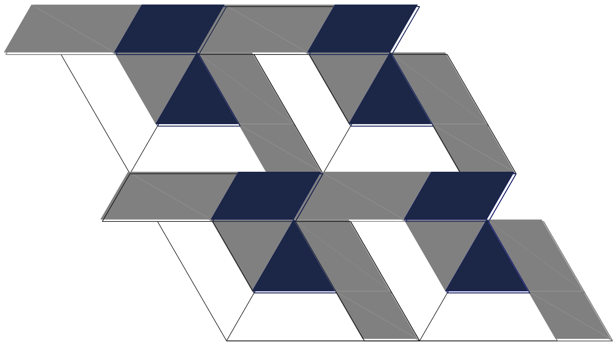
Chiesa Conventuale

Chiesa Conventuale: una delle pavimentazioni più complesse della Certosa.

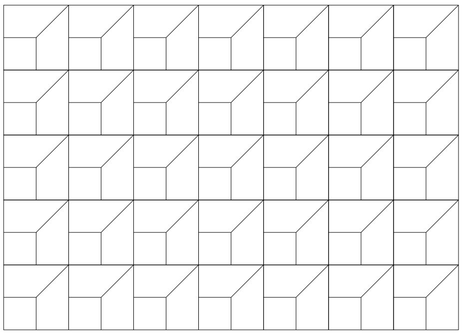


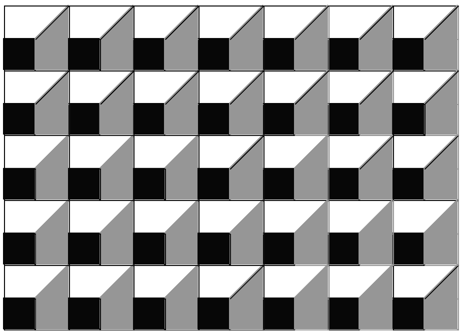


Il modulo di base è un parallelogramma (un rombo), non facilmente identificabile. I poligoni interni al modulo sono triangoli equilateri, parallelogrammi e trapezi isosceli. Qualcuno ha voluto riconoscerci il rapporto aureo ma l'effetto è dovuto al fatto che il rapporto fra le diagonali di un rombo, formato da due triangoli equilateri, è dato da $\sqrt{3}$ e cioè 1,7… abbastanza vicino al numero aureo 1,618…

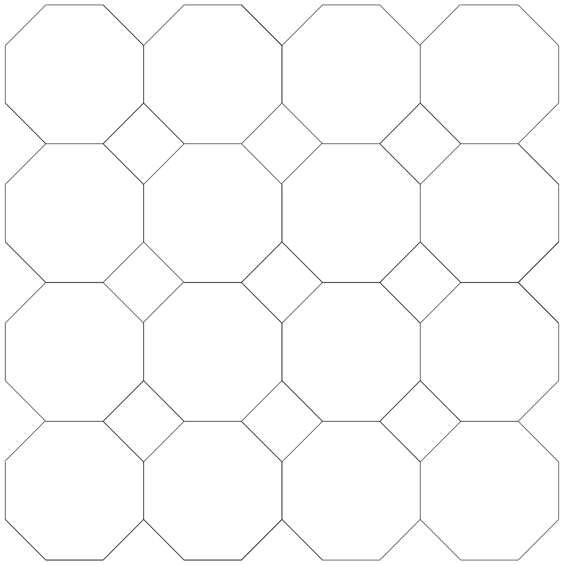


Cappella del Crocifisso: pavimentazione ottenuta con quadrati. Non ci sono assi di simmetria e quindi non è possibile ottenerla con le scatole di specchi. All'interno del modulo di base (il quadrato) esiste un asse di simmetria, ma in presenza del colore anche questo asse sparisce. Si producono invece effetti ottici particolari. In questo modulo compare la figura del trapezio rettangolo che ha la base minore uguale al lato non obliquo.



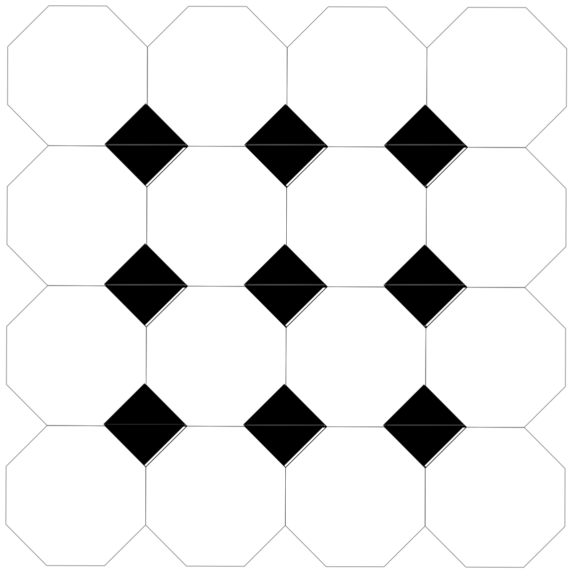


Cappella dell'Addolorata : è un esempio di pavimentazione semi regolare, in quanto sono presenti due poligoni regolari, l'ottagono e il quadrato. Questa pavimentazione è riproducibile in una



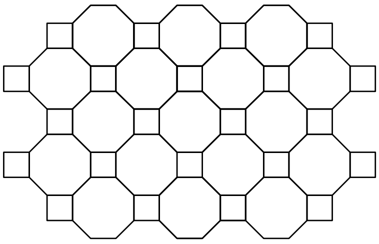
camera di specchi quadrata o triangolare, attraverso diversi tipi di "piastrelle".

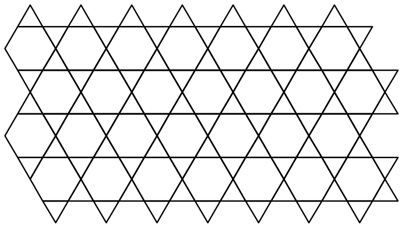
Nella pavimentazione la presenza dei colori non altera la simmetria della figura.

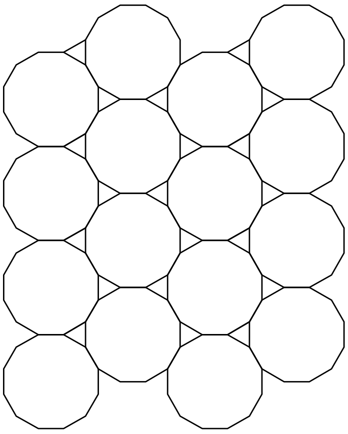


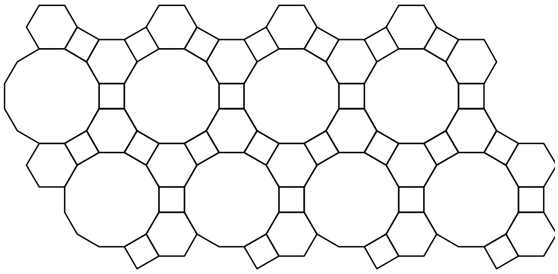
A partire da questa griglia è inoltre possibile sezionare un ottagono regolare in modo da ottenere un quadrato.

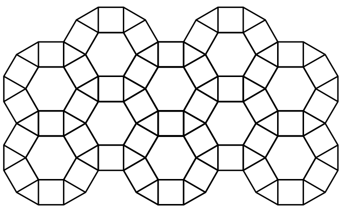
Le otto tassellazioni semiregolari

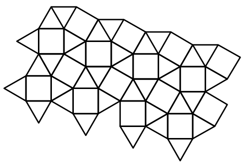


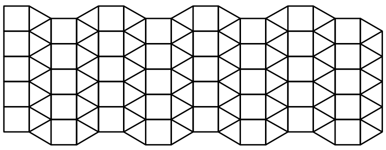


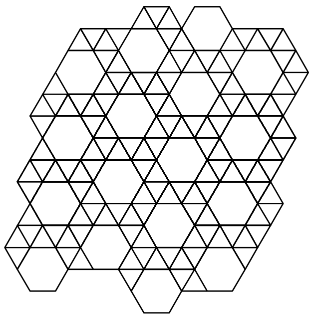






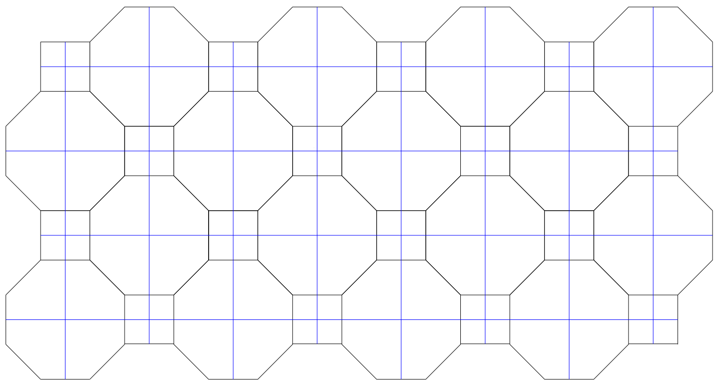


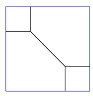


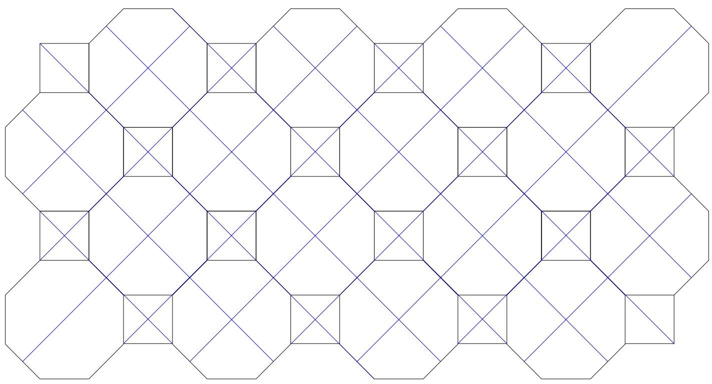


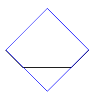
Dalla pavimentazione della Cappella dell'Addolorata alle scatole di specchi

Per trovare la forma delle piastrelle da inserire nelle scatole di specchi, è sufficiente tracciare gli assi di simmetria della pavimentazione e individuare un quadrato o un triangolo.



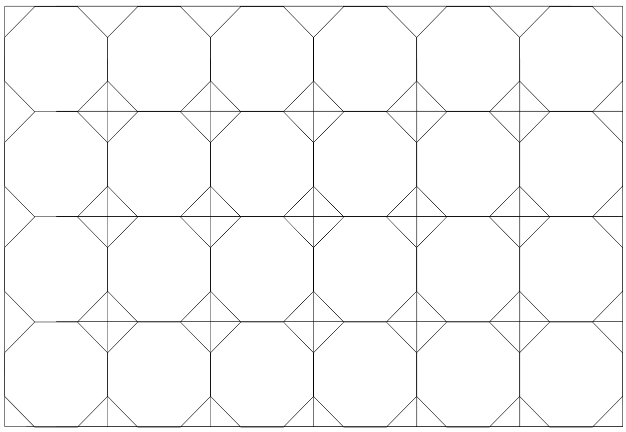


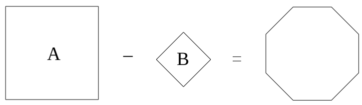




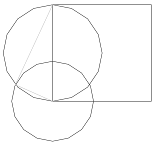
Quante mattonelle diverse si possono ottenere?

Dalla pavimentazione della Cappella dell'Addolorata alla scomposizione dell'ottagono in un quadrato

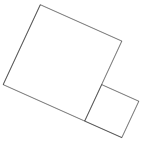


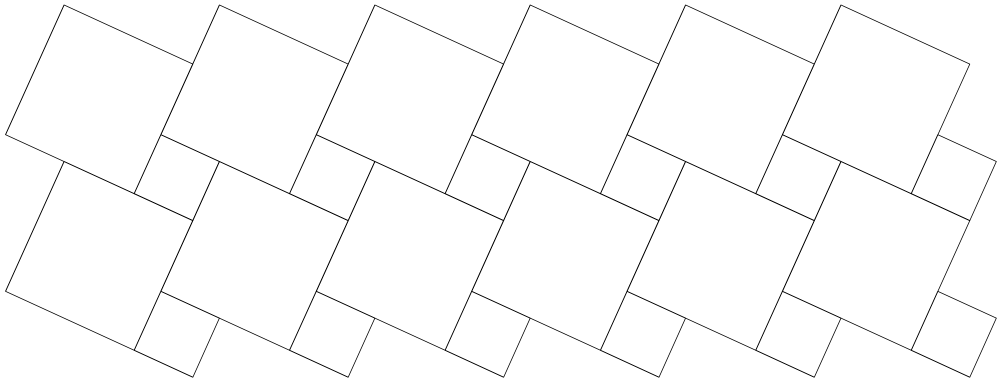


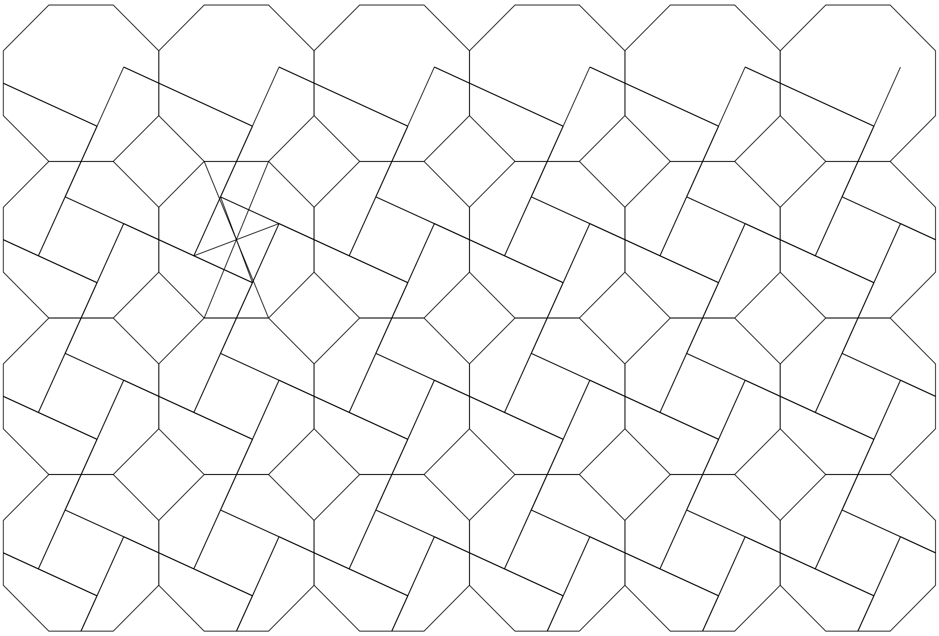
Il quadrato equivalente all'ottagono è facilmente costruibile utilizzando il teorema di Pitagora: il quadrato A è il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo avente come cateti il lato del quadrato B e il lato del quadrato equivalente all'ottagono. Per costruirlo, si parte dal quadrato A e si traccia una circonferenza che ha centro nella metà del lato e passa per i vertici. La circonferenza che ha raggio uguale al lato del quadrato B e centro in uno dei due vertici, interseca la prima circonferenza in un punto che è il vertice dell'angolo retto del triangolo.



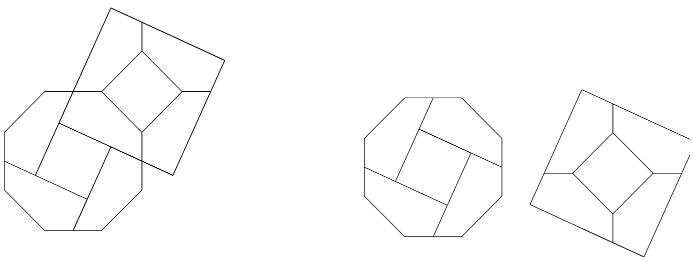
Si disegna poi il quadrato equivalente all'ottagono, conservando l'inclinazione del lato; si aggiunge il quadrato B e si costruisce la griglia che dovrà essere sovrapposta a quella dell'ottagono e del quadrato.



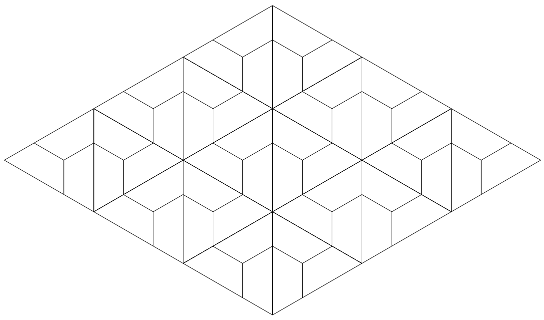




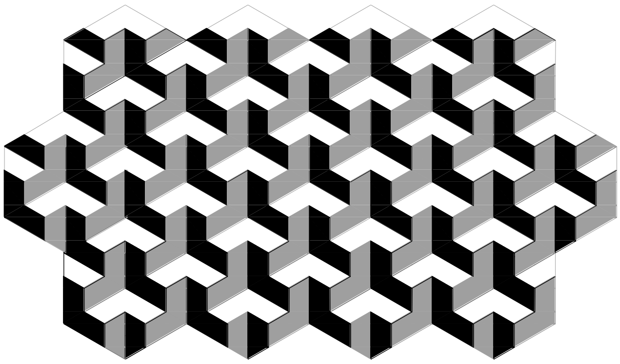
Modulo per la griglia: il centro del quadratino si sovrappone al centro dell’ottagono.

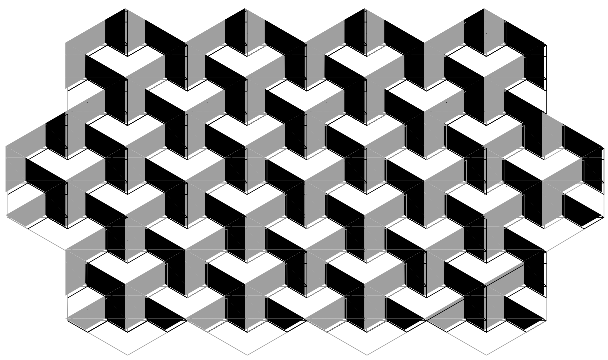


Cappella di San Ranieri: il modulo di base è un rombo formato con due triangoli equilateri. In ogni triangolo sono disegnati tre trapezi isosceli. La scelta del colore produce degli effetti ottici particolari.

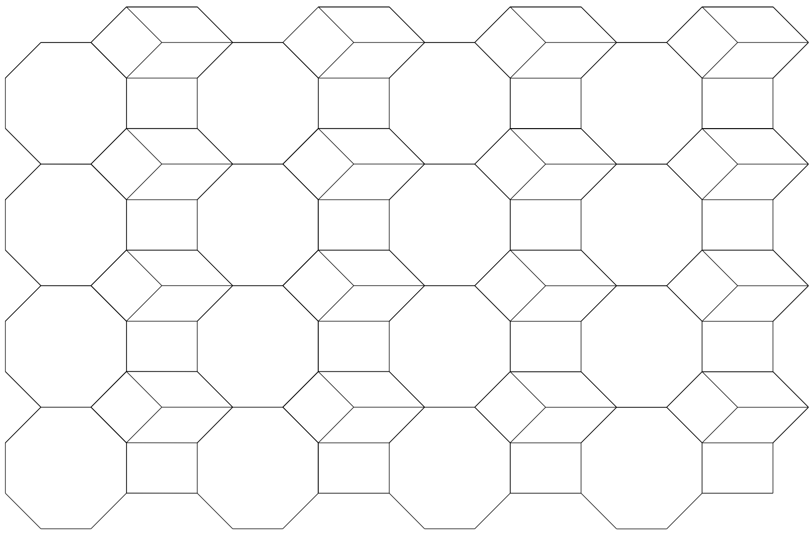


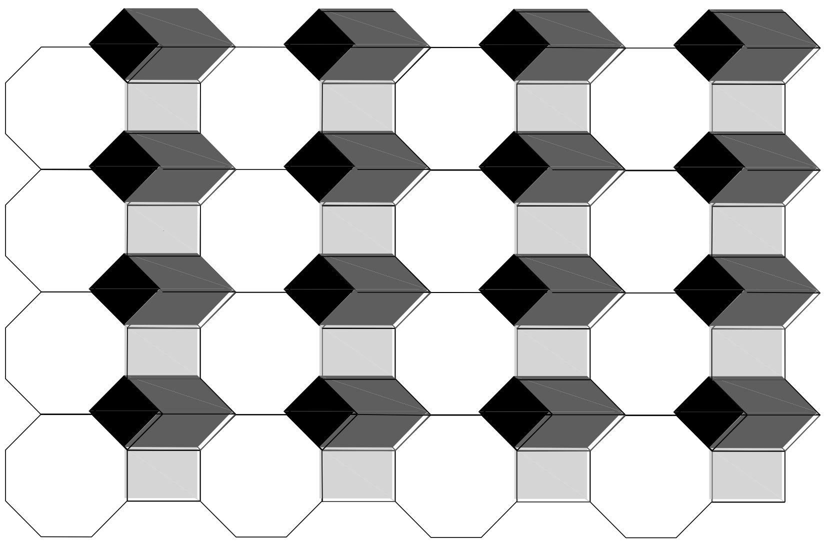
Generalmente interpretiamo un'immagine come se gli oggetti che essa rappresenta fossero illuminati da una sorgente luminosa puntiforme (il sole). Poiché abbiamo la sensazione che la luce venga sempre dall'alto, da sopra la nostra testa, nella vista di destra sembrano formarsi oggetti completamente diversi da quelli della vista di sinistra.





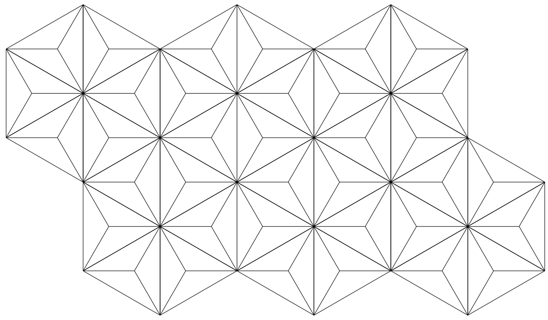
Cappella del Rosario: la pavimentazione presenta ottagoni , quadrati, parallelogrammi e rettangoli.

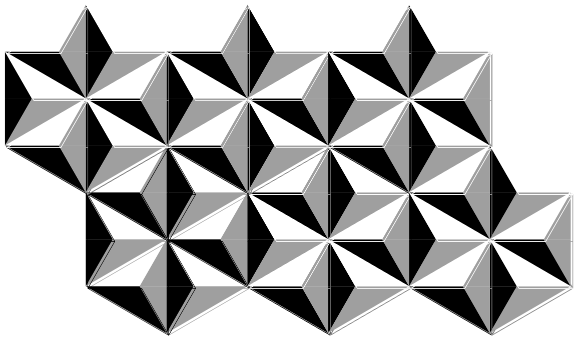




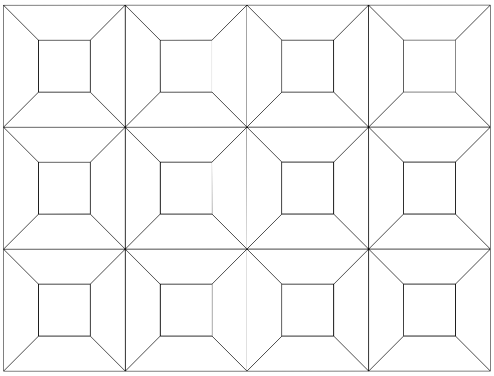
Il modulo di base è un parallelogramma.

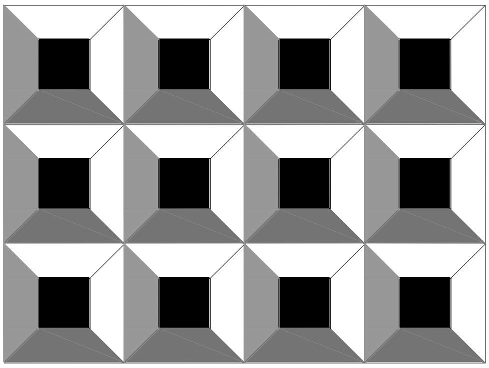
Cappella di San Giovanni: esempio di pavimentazione con modulo di base a forma di rombo, come nella Cappella di San Ranieri. Qui il baricentro dei due triangoli equilateri è il punto di incontro delle tre mediane, nella Cappella di san Ranieri è il vertice che i tre trapezi isosceli hanno in comune. Le diagonali del rombo sono assi di simmetria per la figura ma in questo caso il colore fa perdere la simmetria.



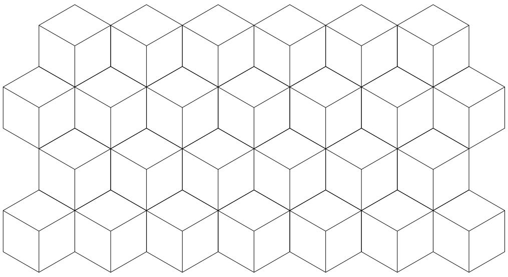


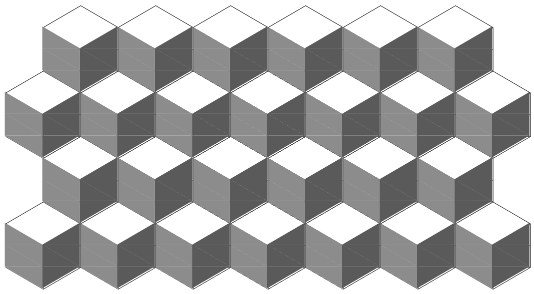
Cappella della Sacra Famiglia: il modulo di base è un quadrato, al cui interno sono diesgnati un quadrato e quattro trapezi isosceli. E' possibile una riproduzione della pavimentazione con la scatola di specchi quadrata ma senza i colori (o con una diversa disposizione dei colori: quale?).



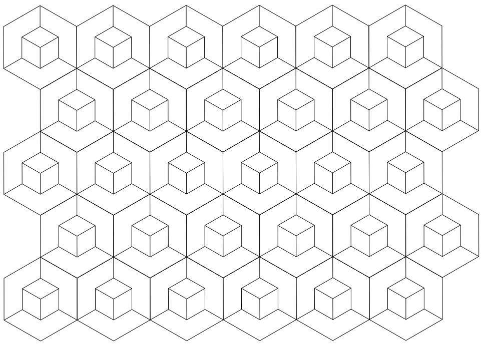


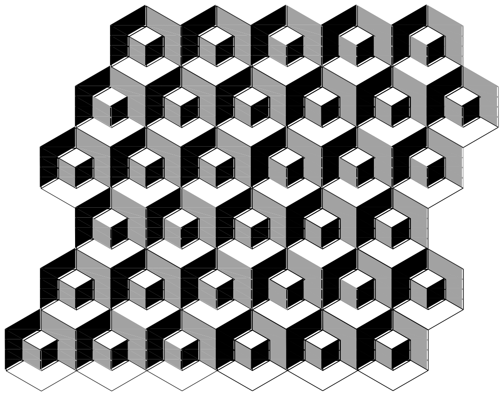
Cappella di San Bruno: pavimentazione a base esagonale.



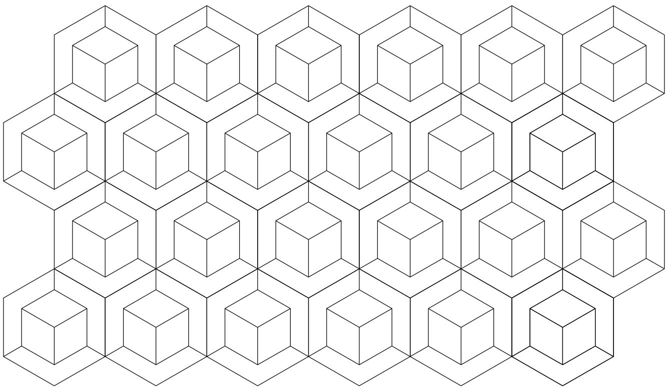


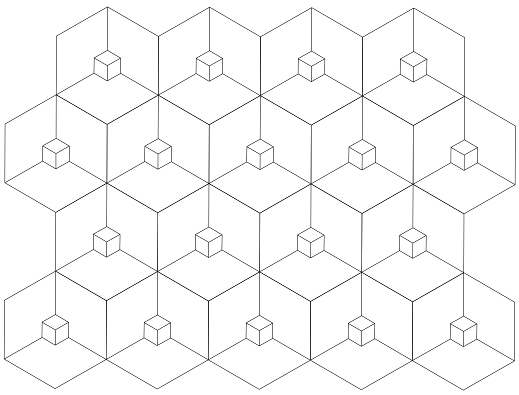
Convento di San Giuseppe a Pisa: refettorio. Il modulo di base è un esagono al cui interno è disegnato un altro esagono che ha il lato uguale alla metà del lato del primo.



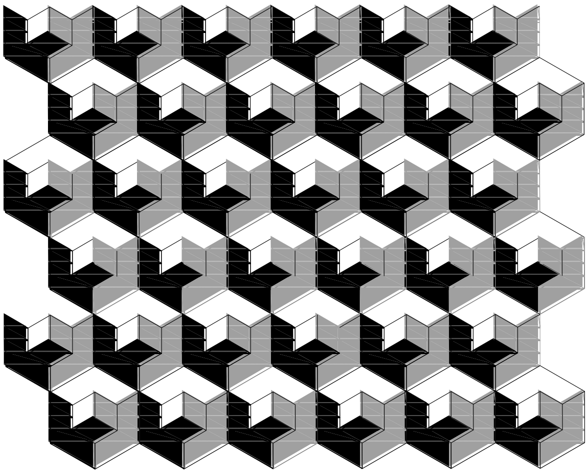


La pavimentazione si presta a numerosi effetti ottici.
Intanto è possibile cambiare le dimensioni dell’esagono interno, come nei due disegni sottostanti.
Potremmo dire che al tendere a zero del lato dell’esagono (o cubo?) interno, la pavimentazione “tende”….a quella della Cappella di San Bruno.

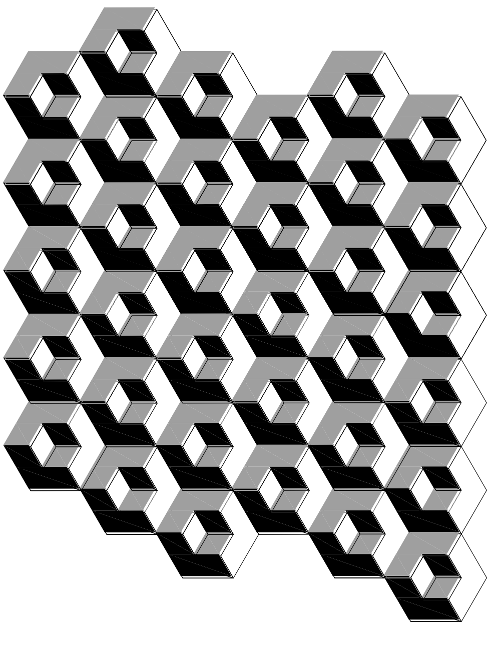


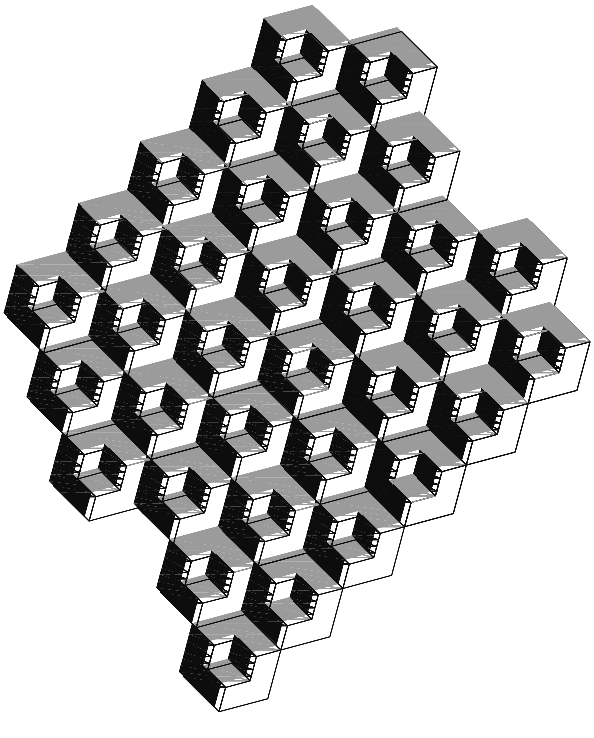


Oppure si può cambiare la disposizione dei colori in modo opportuno e si ottengono dei cubi "sospesi" alla tassellazione.



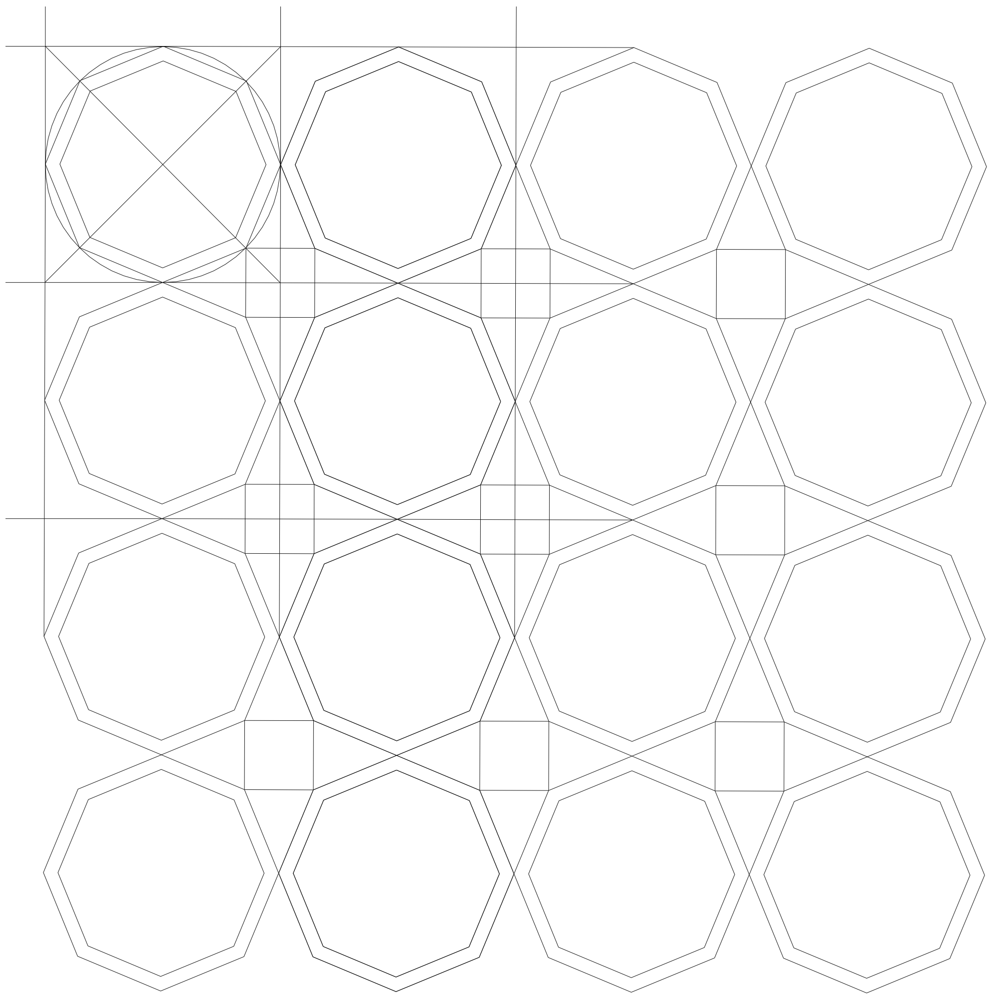
Anche ruotando la figura (e quindi guardando il pavimento da punti diversi) il disegno sembra cambiare.





Ottagoni regolari nell'arte

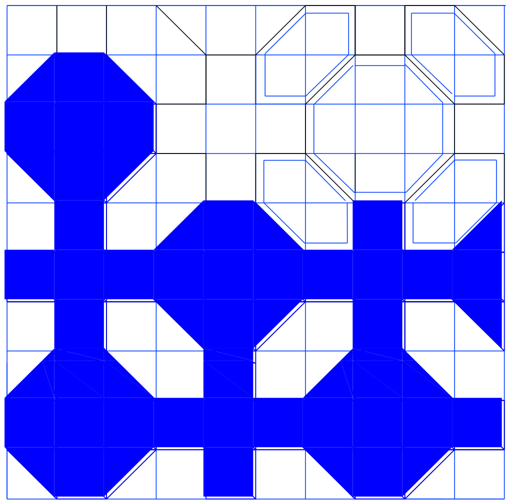
Ottagoni regolari in una decorazione di un soffitto a cassettoni nella cella del grande tempio a Palmira (36 circa d.C.). Il disegno si ottiene da una griglia di 16 quadrati. Si tracciano le diagonali e in ogni quadrato si inscrive un cerchio. Poi vi si inscrivono gli ottagoni e si disegnano i quadratini congiungendo gli angoli delle stelle.

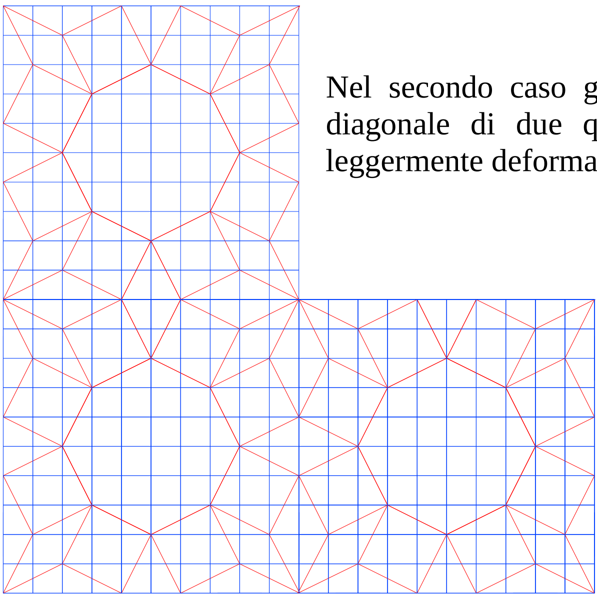


Ottagoni non regolari

L’arte araba è una fonte quasi inesauribile di tassellazioni del piano. Qui presentiamo alcuni esempi di pavimentazioni con ottagoni non regolari.

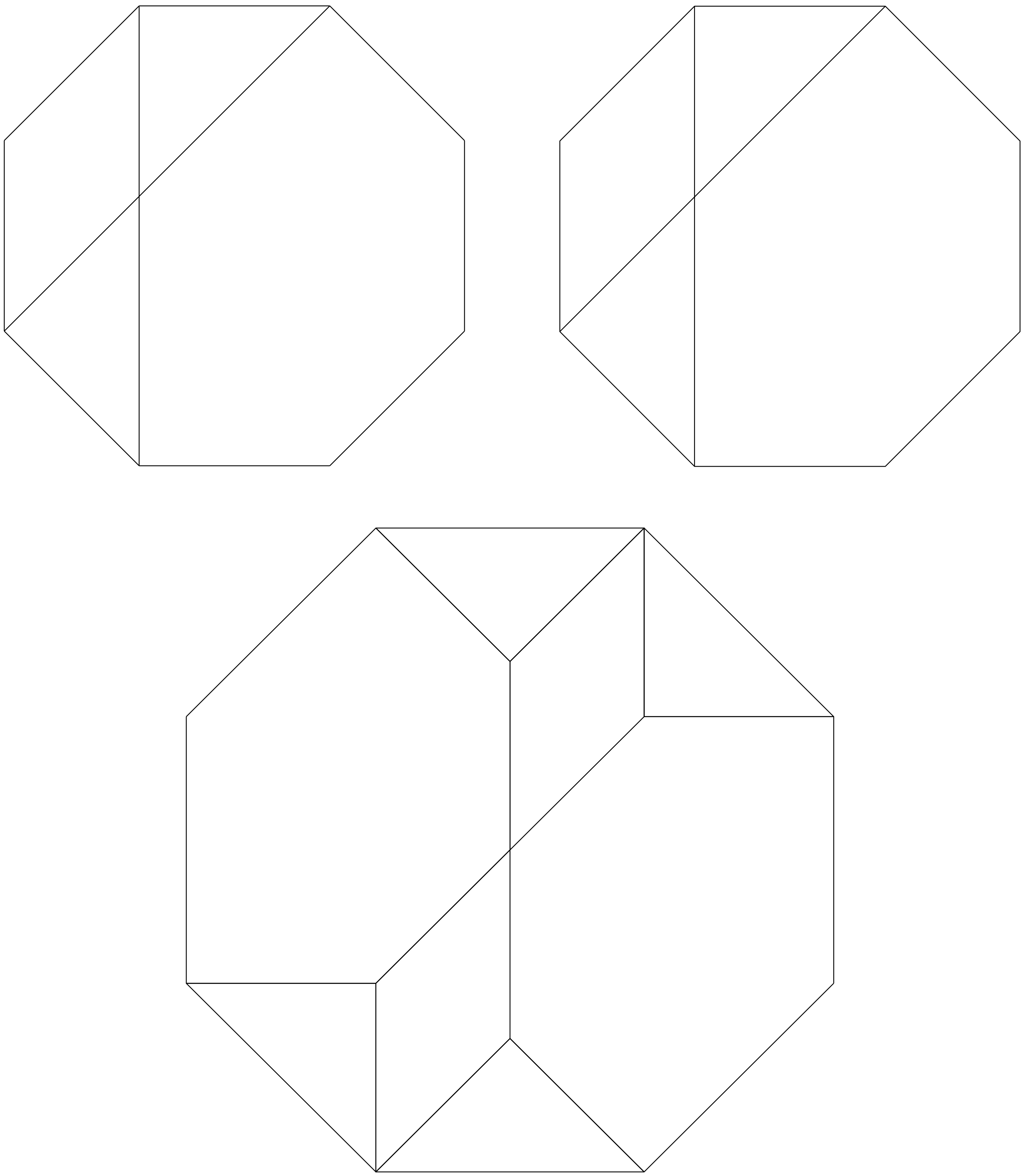
Nel primo esempio gli ottagoni sono costituiti da angoli uguali e lati lunghi alternati a lati più brevi. Questo deriva dal fatto che il sistema di posa delle mattonelle veniva fatto basandosi su un foglio di carta suddiviso in quadrati, e il modo più semplice di ottenere l’ottagono è quello di tracciare linee che alternativamente seguano il lato o la diagonale del quadrato.



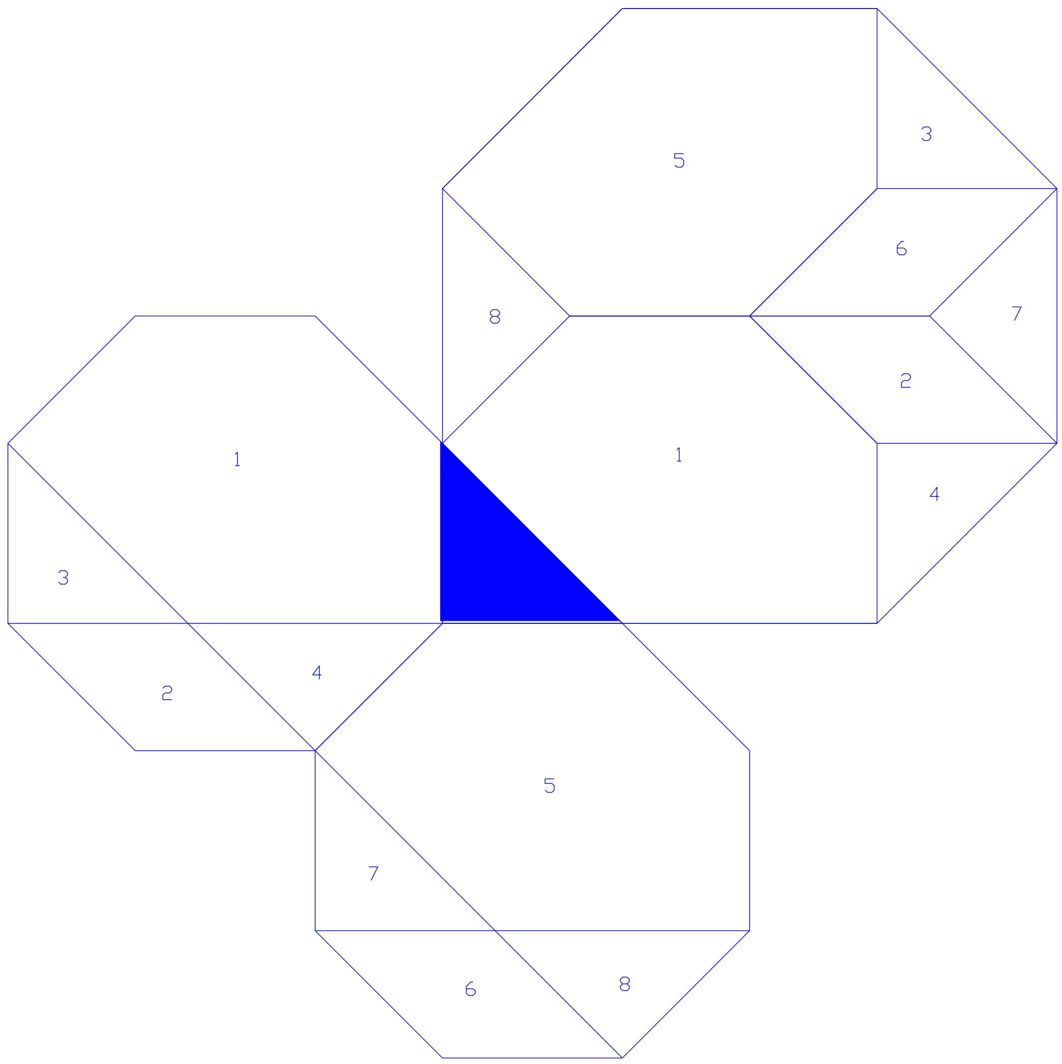


Nel secondo caso gli ottagoni hanno i lati tutti uguali, ottenuti dalla diagonale di due quadretti, e angoli diversi. La figura risultante è leggermente deformata obliquamente.

Da due ottagoni a uno solo: il puzzle permette di ottenere un ottagono regolare a partire da due ottagoni uguali: cercare la lunghezza del lato del nuovo ottagono a partire dalla particolare suddivisione in poligoni dei due ottagoni di partenza.

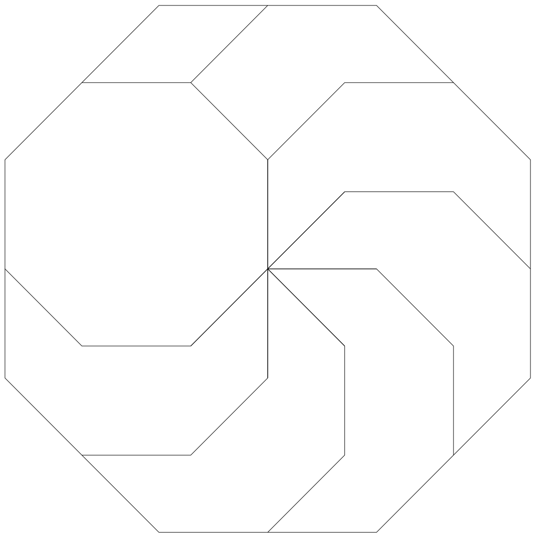


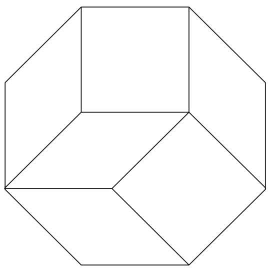
Il teorema di Pitagora: il puzzle dell'ottagono permette di vedere, in questo caso, come il Teorema di Pitagora sia valido anche se si considerano gli ottagoni e non solo i quadrati, costruiti sui lati di un triangolo rettangolo isoscele. Possiamo infatti verificare che l'area dell'ottagono costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo è data dalla somma delle aree degli ottagoni costruiti sui cateti. Può essere un punto di partenza per motivare alla ricerca della dimostrazione della validità del teorema per qualunque figura costruita sull'ipotenusa (purché…).



Dato un ottagono di lato l, costruire un ottagono di lato 2l

Ecco un modo semplice per ottenere un ottagono col lato doppio di un ottagono dato: si fanno otto copie dell'ottagono di partenza e poi si sovrappongono come in figura. Che relazione c'è fra le due aree?



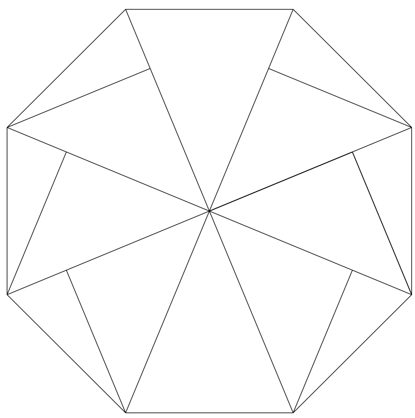


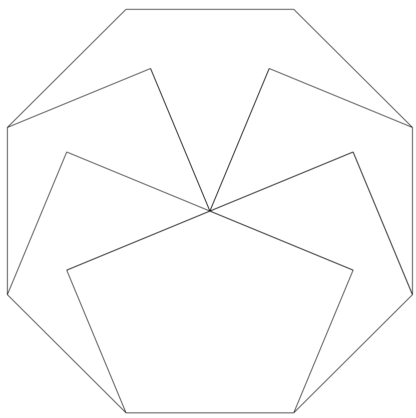
Ci si può aiutare con le figure geometriche che si evidenziano nel particolare sezionamento dell'ottagono, ottenibile con due quadrati e quattro rombi: l'ottagono di lato doppio è formato da ….rombi + …..quadrati.

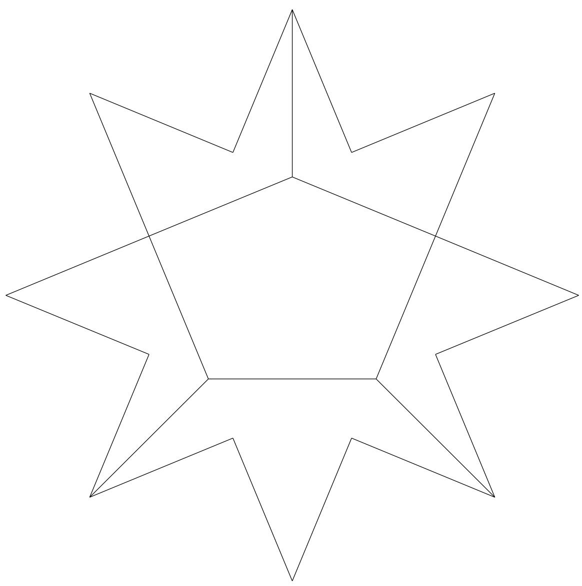
E' possibile ripetere la stessa costruzione con qualunque poligono?

Dall’ottagono alla stella

Dopo aver tracciato tutte le diagonali dell’ottagono, si trovano le altezze dei triangoli isosceli relative ad uno dei due lati uguali. Poi si seziona l’ottagono nei sei pezzi della figura centrale. Questa sezione dell’ottagono in sei pezzi è dovuta a Harry Lindgren, il più grande esperto mondiale in questo campo della geometria.

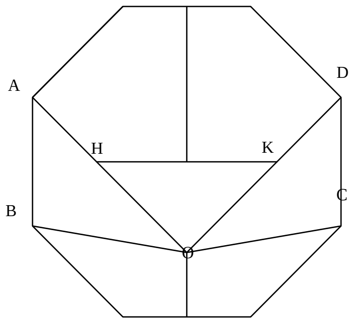


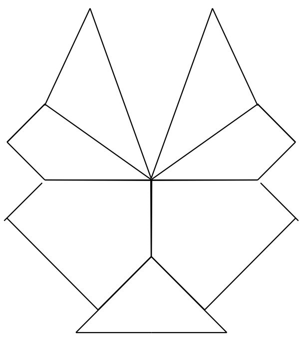


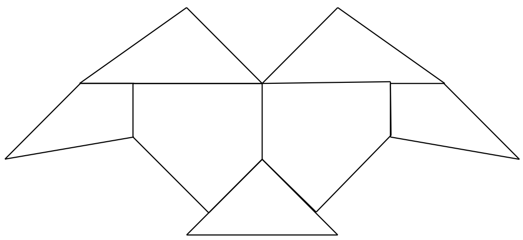


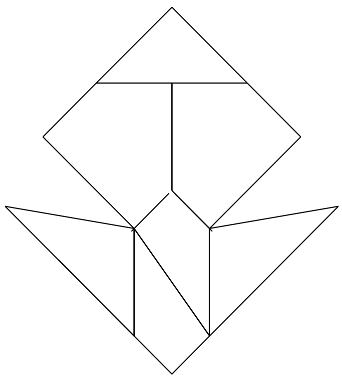
Puzzle di Zornbrecher

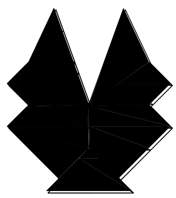
Il più antico esempio conosciuto di questo puzzle risale al 1892. Per la suddivisione dell'ottagono nei sette pezzi si procede così: si tracciano le diagonali da A e da D che si incontrano nel punto O. Si tracciano poi gli assi di simmetria e si individuano i punti di incontro con le due diagonali; infine si uniscono i punti B e C con O. E' possibile trovare l'ampiezza di tutti gli angoli senza l'uso della trigonometria?

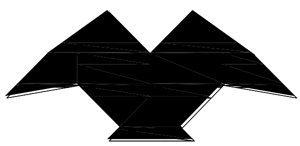


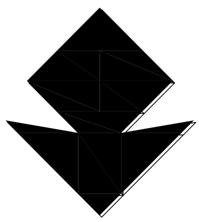








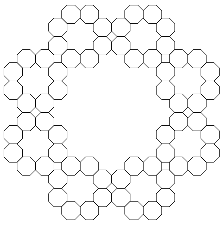


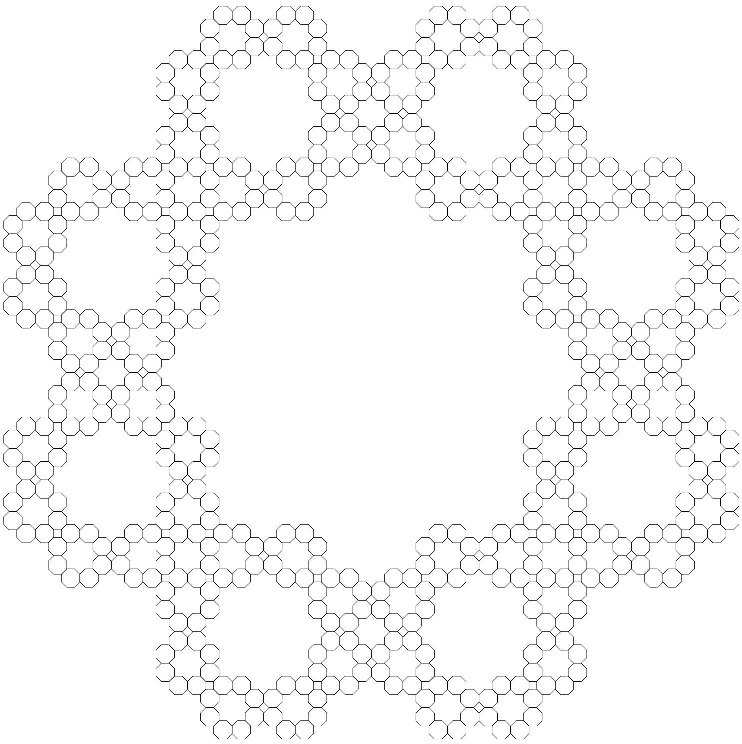


.

Un esempio di frattale

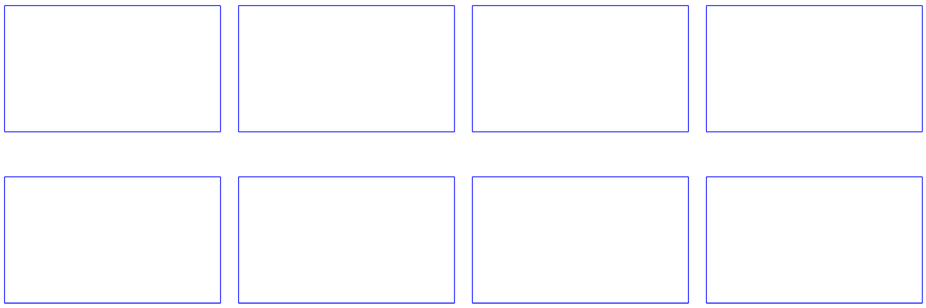
Frattale di Sierpinski ottenuto a partire da un ottagono.

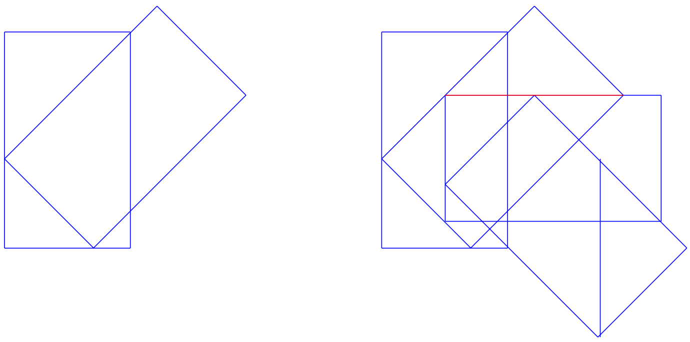


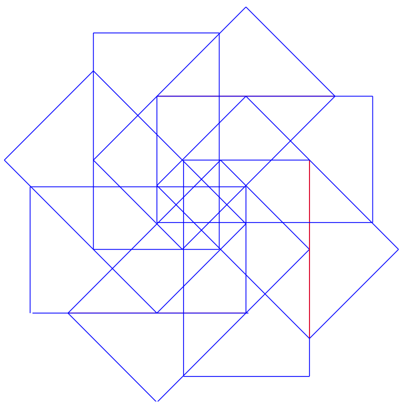


Un pattern ottagonale

Per realizzare questo pattern si devono ritagliare gli otto rettangoli e sovrapporli come indicato in figura. Il metodo migliore è quello di fare quattro coppie di rettangoli e poi sovrapporle tutte e quattro in modo da ottenere il disegno. Notare l'importanza delle dimensioni del rettangolo:il pattern non è ottenibile con dimensioni differenti. Si suggerisce pertanto di ottenere gli 8 rettangoli fotocopiando quelli disegnati qui sotto.

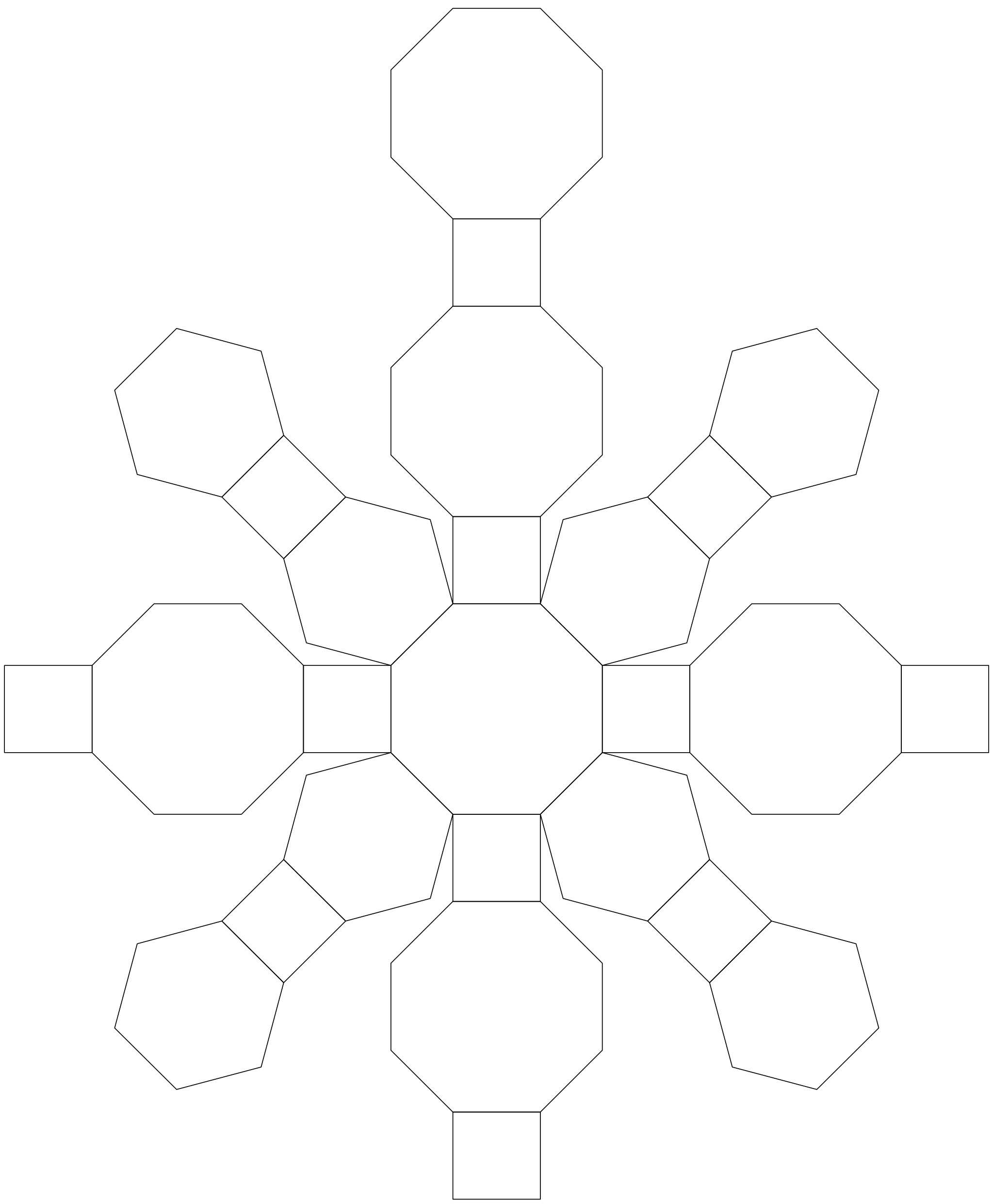






Dürer e gli sviluppi dei solidi

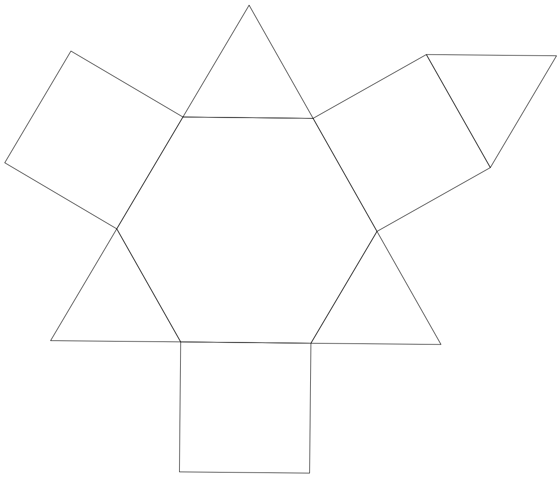
Nel suo trattato "Underweysung der messung mit dem Zirchel und Richtscheyt", Albrecht Dürer presenta sette poliedri Archimedei , oltre ad altri solidi non Archimedei, e illustra il primo metodo mai pubblicato di sviluppo di un solido su un piano. Qui è riprodotto lo sviluppo del cubo-ottaedro tronco.

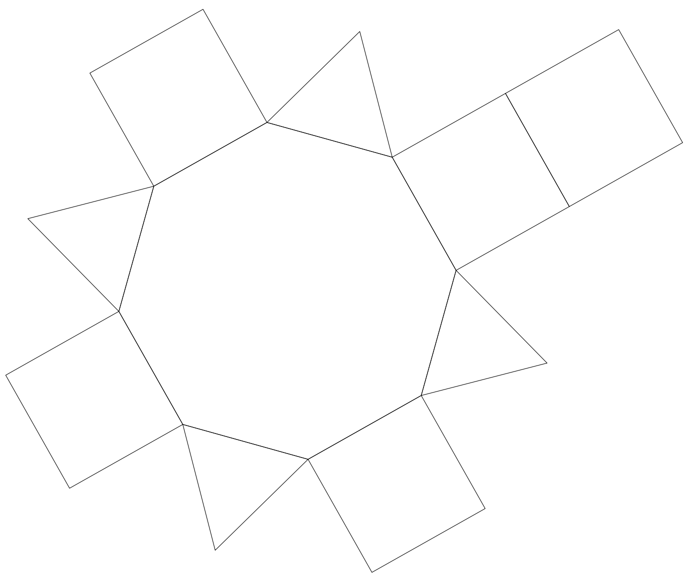


Un modo diverso di costruire un solido

Ritagliate i modelli, dopo aver aggiunto lateralmente le linguette che vi serviranno a incollare i due solidi. La tecnica migliore è quella di ingrandire le due figure fino alla dimensione voluta e poi fotocopiarle su cartoncino leggero di due diversi colori. Con otto solidi del tipo A e sei del tipo B, incollati insieme lungo le facce triangolari, si ottiene un cubo-ottaedro tronco; con sei solidi del tipo B, incollati lungo le facce quadrate, si ottiene un cubo tronco. Per attaccare le linguette è abbastanza comodo l'uso di colla UHU, per incollare le facce è più semplice utilizzare lo scotch biadesivo.

modello A



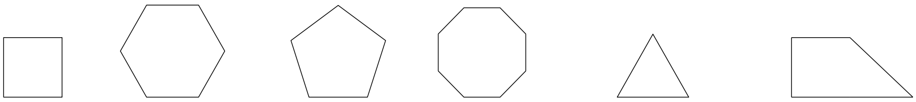


modello B

Scheda per le classi elementari

1. Quali sono i colori del pavimento della Chiesa della Certosa?__________________________

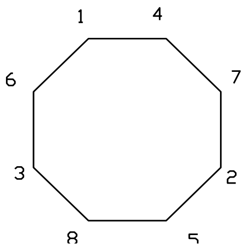
____



2. Quali di questi poligoni trovi nelle pavimentazioni delle Cappelle?_____________________

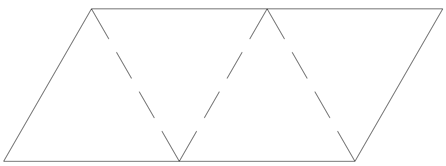
____

3. Che figura ottieni se unisci ordinatamente da 1 a 8 e poi ancora a 1, i vertici di questo ottagono?____________

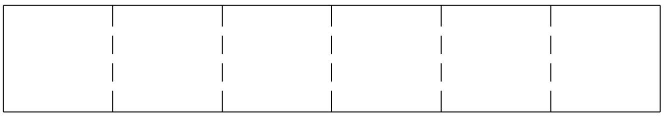


4. La figura che hai costruito è una ……..ottagonale. Dove si trova questa figura nella Certosa?____

5. Che oggetto puoi costruire con questi triangoli, piegandoli lungo le linee tratteggiate?_____



6. E con questi 6 quadrati?



Scheda per le classi medie

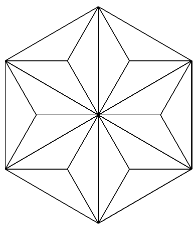
1. Quali sono i poligoni regolari presenti nelle pavimentazioni?

2. E quelli non regolari?

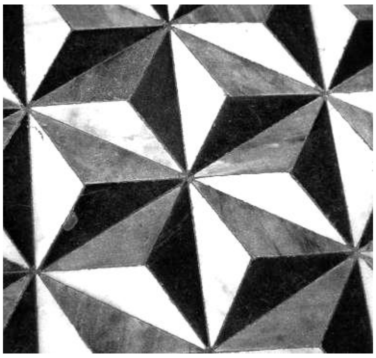
3. Elenca gli oggetti di forma ottagonale che trovi all'interno della Certosa

   ____

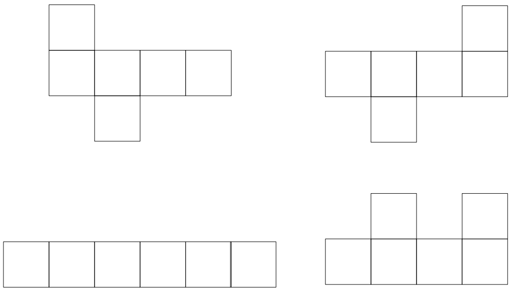
4. Quali sono gli assi di simmetria di questa figura? Tracciali con la matita



5. E della stessa figura ma coi colori?

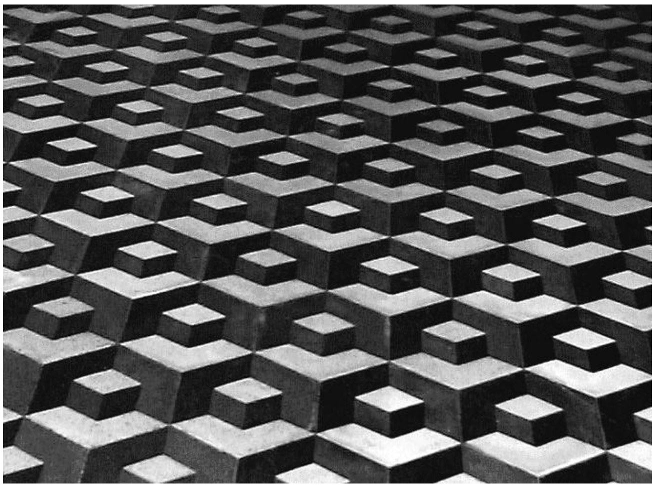


6. Quali solidi ottieni da questi sviluppi?



BIBLIOGRAFIA

1) Greg N. Frederickson	Dissections: Plane & Fancy	Cambridge University
2) William Gibbs	Window Patterns	Tarquin Publications
3) H.M.Cundy, A.P. Rollett	Mathematical Models	Tarquin Publications
4) Bellingeri, Dedò et alii	Il ritmo delle forme	Mimesis
5) D. Pedoe	Geometry and Visual Arts	Dover
6) H. E. Dudeney	Amusements in Mathematics	Dover
7) Hugo Steinhaus	100 Problems in Elementary Mathematics	Dover
8) Tangente	L'art des pavages	n.99
9) Cerveau & Psycho	La force des emotions	n.6
10) M.A.Giusti, M.T. Lazzarini	La Certosa di Pisa a Calci	Pacini Editori
11) P. Stevens	Handbook of Regular Patterns	The Mit Presse
12) Victor Simonetti	Ciao Pitagora	Corraini Editore.



A cura della prof. Ornella Sebellin dell'Istituto Statale d'Arte "Franco Russoli" di Pisa.